II GUIDE RECTANGULAIRE

II. 1 Solution de l'équation d'onde

l'équation d'onde ou d'Helmholtz s'écrit

$$\Delta\left(\underline{\vec{E}} \text{ ou } \underline{\vec{H}}\right) = \underline{k}^2\left(\underline{\vec{E}} \text{ ou } \underline{\vec{H}}\right) \qquad \text{avec } \underline{k}^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

si $\underline{\Psi}$ représente une composante du champ $\vec{E}$ ou $\vec{H}$ alors on a :

$$\Delta\underline{\Psi} = \underline{k}^2\underline{\Psi} \quad (1)$$

Comme $\underline{\Psi} = \underline{\Psi}(x, y, z)$, on résout l'équation aux dérivées partielles (linéaire homogène à 3D) par la méthode de séparation des variable qui consiste à poser :

$$\underline{\Psi}(x, y, z) = \underline{X}(x)\,\underline{Y}(y)\,\underline{Z}(z) \quad (2)$$

en introduisant (2) dans (1) on obtient

$$\frac{1}{\underline{X}}\frac{d^2\underline{X}}{dx^2} + \frac{1}{\underline{Y}}\frac{d^2\underline{Y}}{dy^2} + \frac{1}{\underline{Z}}\frac{d^2\underline{Z}}{dz^2} = \underline{k}^2 \quad (3)$$

puisque la somme de 3 termes du membre gauche de l'équation donne une constante alors chacun doit être lui même une constant ; alors on pose.

$$\frac{1}{\underline{X}}\frac{d^2\underline{X}}{dx^2} = -\underline{k}_x^2 \quad (a), \qquad \frac{1}{\underline{Y}}\frac{d^2\underline{Y}}{dy^2} = -\underline{k}_y^2 \quad (b), \qquad \frac{1}{\underline{Z}}\frac{d^2\underline{Z}}{dz^2} = -\underline{k}_z^2 \quad (c) \qquad (4)$$

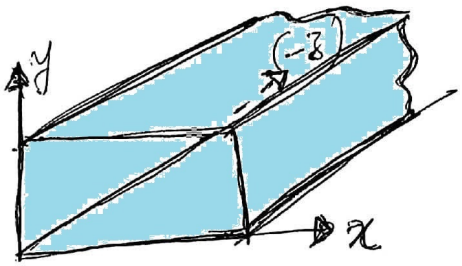
ce qui, en combinant avec (3) donne :

$$-\underline{k}_x^2 - \underline{k}_y^2 - \underline{k}_z^2 = \underline{k}^2 \quad (5)$$

les solutions des equations (4) se mettent sous la forme.

Cours Propagation Guidée - BENZINA H-ENIG

$$\underline{X}(x) = \underline{A}\sin \underline{k}_x x + \underline{B}\cos \underline{k}_x x \quad (a)$$
$$\underline{Y}(y) = \underline{C}\sin \underline{k}_y y + \underline{D}\cos \underline{k}_y y \quad (b) \qquad (6)$$
$$\underline{Z}(z) = \underline{E}\sin \underline{k}_z z + \underline{F}\cos \underline{k}_z z \quad (c)$$



Comme l'onde guidée va se propager selon $oz > 0$, alors on prendra $\underline{k}_z^2 = -\underline{\gamma}_g^2$ de telle sorte que (5) devient :

$$\underline{\gamma}_g^2 = \underline{k}^2 + \underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2$$ ($\underline{\gamma}_g$: constante de propagation guidée)

On pose $\underline{k}_c = \sqrt{\underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2}$ qu'on appellera nombre d'onde de coupure (ou nombre d'onde transverse)

Pour un milieu sans perte (celui qui se trouve à l'intérieur du guide), on a $\sigma << \varepsilon$ et

$$\underline{k}^2 = j\omega\mu\sigma + j\omega\varepsilon = -\omega^2\mu\varepsilon = -k_0^2$$

d'où $\underline{\gamma}_g^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + \underline{k}_c^2$

lorsque $\underline{\gamma}_g = 0$ alors $\underline{k}_c^2 = \omega_c^2\mu\varepsilon$

ω_c est la pulsation de coupure.

$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ est alors la fréquence de coupure.

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Dans ce cas il n'y a pas de propagation (il y a évanescence)

- lorsque $f > f_c$ il y a propagation

$$\underline{\gamma}_g = \pm j\beta_g = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\beta_g^2 = -k_c^2 + \omega^2\mu\varepsilon \quad (\diamond)$$

Cours Propagation Guidée - BENZINA H- ENIG

$$\gamma_g = j k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Lorsque $f < f_c$

$$\gamma_g = \pm \alpha_g = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}$$

L'onde est atténuée.

Nous retenons que la solution se met sous la forme : (d'une onde guidée qui se propage selon les $z > 0$)

$$\underline{\psi}(x,y,z) = \left[\underline{A}\sin(k_x x) + \underline{B}\cos(k_x x)\right]\left[\underline{D}\sin(k_y y) + \underline{E}\cos(k_y y)\right] e^{-j\beta_g z}$$

II.2 Modes Transverses électriques TE :

Le tout des modes de propagation qui se caractérisent par $\underline{E}_z = 0$

Exprimons les équations en $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\frac{\vec{E}}{\vec{H}}\right)$ dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_x \qquad \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon \underline{E}_x$$

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu \underline{H}_y \qquad \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon \underline{E}_y$$

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu \underline{H}_z \qquad \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon \underline{E}_z$$

Sachant que $\underline{E}_z = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta_g$ ces équations se réduisent à :

$$+j\beta_g \underline{E}_y = -j\omega\mu \underline{H}_x \quad (e_1) \qquad \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j\beta_g \underline{H}_y = j\omega\varepsilon \underline{E}_x \quad (e_4)$$

$$-j\beta_g \underline{E}_x = -j\omega\mu \underline{H}_y \quad (e_2) \qquad -j\beta_g \underline{H}_x - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon \underline{E}_y \quad (e_5)$$

$$\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu \underline{H}_z \quad (e_3) \qquad \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} = 0 \quad (e_6)$$

Cours Propagation Guidée BENZINA H. ENIG

$$\Rightarrow \underline{H}_x = -\frac{\beta_g}{\omega\mu}\underline{E}_y \quad (e_{11}) \xrightarrow{(e_5)} -j\beta_g \underline{E}_x - \frac{\beta_g}{\omega\mu}\underline{E}_y - j\omega\varepsilon\underline{E}_y = \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \underline{H}_y = \frac{\beta_g}{\omega\mu}\underline{E}_x \quad (e_{21}) \qquad -j\frac{k_c^2}{\omega\mu}\underline{E}_y = \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = \underline{E}_y} \quad (7_a)$$

$$\xrightarrow{(e_{12})} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j\beta_g \frac{\beta_g}{\omega\mu}\underline{E}_x = j\omega\varepsilon\underline{E}_x \Rightarrow \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = -j\frac{k_c^2}{\omega\mu}\underline{E}_x$$

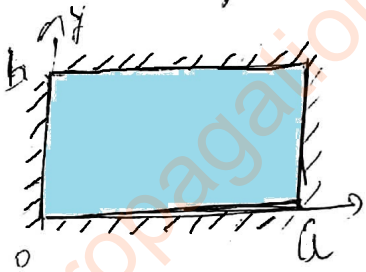
$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}} \quad (7_b)$$

$$(e_{21}) \Rightarrow \underline{H}_x = -\frac{\beta_g}{\omega\mu}\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\underline{H}_x = -j\frac{\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}} \quad (7_c)$$

$$\underline{H}_y = \frac{\beta_g}{\omega\mu}\underline{E}_x = \frac{\beta_g}{\omega\mu} \times (-)\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\underline{H}_y = -j\frac{\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}} \quad (7_{c1})$$

Ainsi, connaissant $\underline{H}_z$ on peut obtenir les autres composantes du champ emg.

Pour le guide rectangulaire



$E_t = 0 \Rightarrow$
$E_y = 0$ en $x = 0$ et a
$E_x = 0$ en $y = 0$ et b
dès que $E_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ d'après (7_a)
dès que $E_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0$ d'après (7_b)

On montre que ce résultat est général c'est à dire qu'au niveau d'un c.e.p, on vérifie que

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$$

$\forall$ la géométrie de la section transversale du guide

En revenant au guide rectangulaire on peut récapituler ceci :

Cours Propagation Guidée - B. NAIT H-ENIG

$$\underline{H_z}(x,y,z) = \underline{X}(x)\,\underline{Y}(y)\,\underline{Z}(z)$$

$$\underline{X}(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } a$$

$$\underline{Y}(y) = C\sin k_y y + D\cos k_y y \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } b$$

$$\underline{Z}(z) = e^{-\gamma z}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{dx} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } a \Rightarrow A k_x \cos k_x x = B k_x \sin k_x x = 0$$

$$\text{en } x = 0 \Rightarrow A k_x \cos k_x a = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\text{en } x = a \Rightarrow -B k_x \sin k_x a = 0 \Rightarrow \sin k_x a = 0 \Rightarrow$$

$$k_x a = m\pi \Rightarrow \boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}} \qquad m = 0, 1, \ldots$$

finalement $X(x) = B\cos\frac{m\pi}{a}x$

on montre de la même manière que : $\boxed{k_y = \frac{n\pi}{b}}$ $n = 0, 1, \ldots$

$$Y(y) = D\cos\frac{n\pi}{b}y$$

ce qui donne

$$\boxed{\underline{H_z}(x,y,z) = \underline{H_{zmn}}\cos\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,e^{-\gamma z}} \quad (8a)$$

en introduisant (8a) dans (7a) on obtient

$$\underline{E_y} = \frac{j\omega\mu}{k_c^2}\underline{H_{zmn}}(-)\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,e^{-\gamma z}$$

$$\boxed{\underline{E_y} = \underline{E_{ymn}}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,e^{-\gamma z}} \quad (8b)$$

(8a) et (7b) donnent $\boxed{\underline{E_x} = \underline{E_{xmn}}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,e^{-\gamma z}}$ (8c)

(8a), (7c) et (7d) donnent

$$\boxed{\underline{H_x} = \underline{H_{xmn}}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\,e^{-\gamma z}} \quad (8d)$$

$$\boxed{\underline{H_y} = \underline{H_{ymn}}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,e^{-\gamma z}} \quad (8e)$$

Cours Propagation Guidée BENZINA R-ENIG

Remarquons que $m = n = 0$ est exclue.
Car cela donne des champs nuls.

Donc on peut déduire que $\exists$ une infinité de solutions d'autre de ces solutions représente un mode de propagation noté TE_{mn} lequel a pour $k_c \Rightarrow$

$$k_{c_{mn}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega_c \sqrt{\mu\varepsilon}$$

d'où la fréquence de coupure du mode TE_{mn} est :

$$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$$\beta_g = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad ; \quad k_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

la vitesse de phase du mode TE_{mn} est

$$v_{p_{mn}} = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{v}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (vitesse de l'onde dans un milieu $\varepsilon\mu$ illimité)

$$\left.\begin{array}{l} (e_2) \Rightarrow \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta_g} \\ (e_1) \Rightarrow \frac{E_y}{H_x} = -\frac{\omega\mu}{\beta_g} \end{array}\right\} \Rightarrow Z_g = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_g}$$

impédance caractéristique de l'onde TE_m

$$Z_g = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad ; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

impédance de l'onde dans un milieu illimité

Cours Propagation Guidée- BENZINA R-ENIG

$$\beta_g = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}}$$

Longueur d'onde guidée

$\lambda = \frac{v}{f}$ · propagation

II.3 Modes Transverses magnétiques TM

Ils sont caractérisés par $E_z = 0$

En faisant une étude semblable à celle pour les modes TE on trouve :

$$\underline{E}_z = \underline{E}_{z\,mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) e^{-j\beta_g z}$$

avec $m = 1, 2, \ldots$ $n = 1, 2, \ldots$

les modes TM_{mn} ou TM_{nm} $n \neq 0$

$$\underline{E}_x = -\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \quad ; \quad \underline{E}_y = -\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}$$

$$\underline{H}_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} \quad ; \quad \underline{H}_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}$$

avec : $\beta_g^2 - k_0^2 = -k_c^2$

$$\underline{E}_x = \underline{E}_{x\,mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$\underline{E}_y = \underline{E}_{y\,mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{x\,mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$\underline{H}_y = \underline{H}_{y\,mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \text{ et } f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

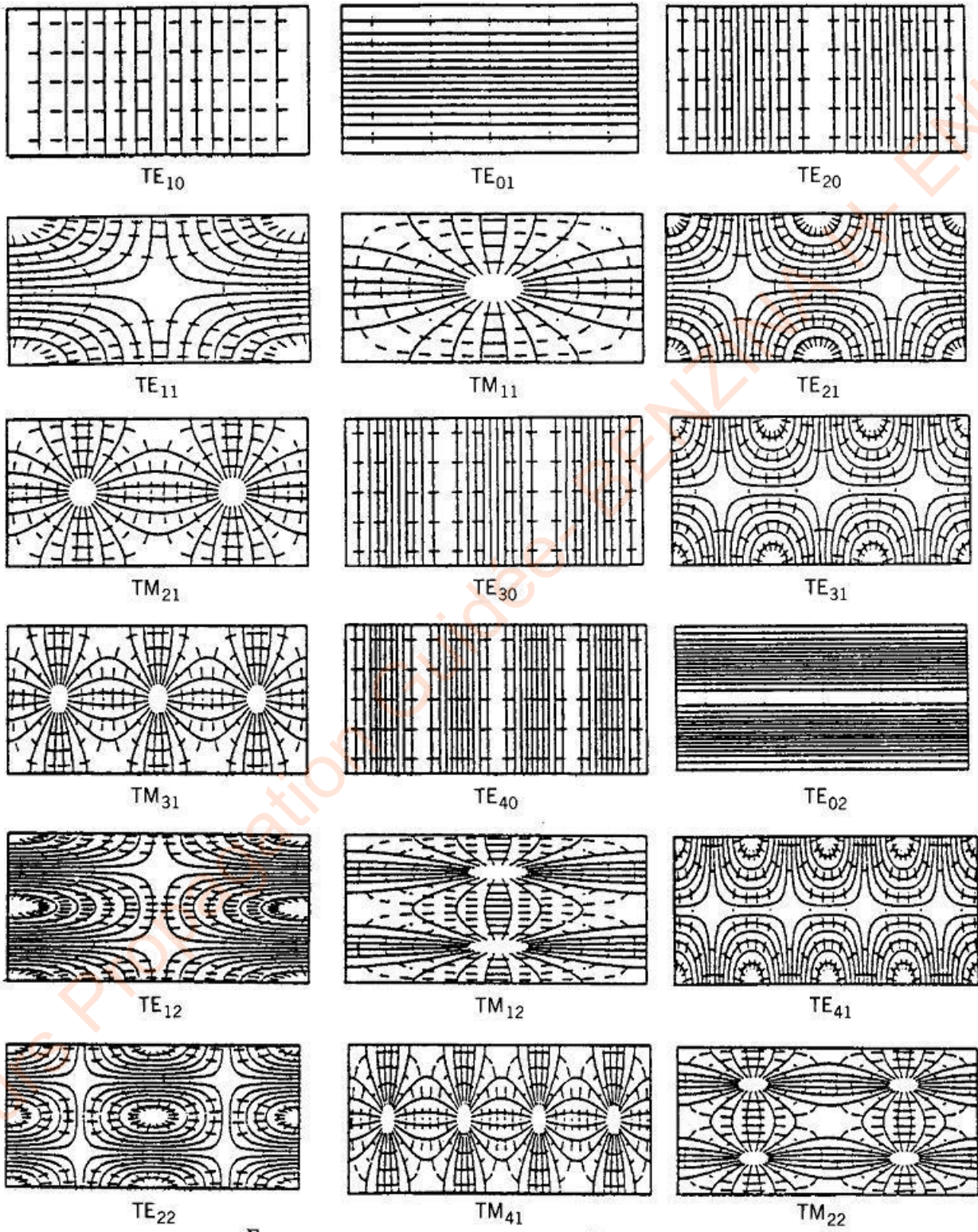
$$\beta_g = k_0\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}$$

mêmes expressions que pour TE$_{mn}$

$$v_g = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \text{ (idem)} \qquad Z_g = \frac{\beta_g}{\omega\varepsilon} = Z_0\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

(différente)

Cours Propagation Guidée - BENZINA H. ENIG


TE10
TE01
TE20
TE11
TM11
TE21
TM21
TE30
TE31
TM31
TE40
TE02
TE12
TM12
TE41
TE22
TM41
TM22
E
H
a/b = 2